21 septembre 2022.

Rappel : à partir de maintenant on étudie les équations différentielles ordinaires (edo) de la forme

$x' = f(t,x)$ (edo d'ordre 1, sous forme normale, non autonome)

ou $x' = f(x)$ (" " " " , autonome)

1. Résolutions des edo d'ordre 1 linéaires

On rappelle que ce sont des edo de la forme :

$$a(t)x' + b(t)x = d(t) \quad \text{où } t \in I \subset \mathbb{R}$$

a. Si $d(t) = 0$ pour tout $t \in I$ càd $a(t)x' + b(t)x = 0$ (1)

hypothèses : . on suppose a et b continues sur I

. on suppose en plus que $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$

méthode de résolution:

étape 1: on divise (1) par $a(t)$: on obtient:

$$x' + \boxed{\frac{b(t)}{a(t)}} x = 0 \quad (2)$$

étape 2: on multiplie (2) par $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$

en effet: rappels: Si $F(t) = \int f(t)dt$ alors $F'(t) = f(t)$

ici: si $u(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)} dt$ alors $u'(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$

De plus, $\left(e^{u(t)}\right)' = e^{u(t)} \cdot u'(t)$

et enfin $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

on obtient: $\underbrace{\underbrace{e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}}_{e^u}}_{f \,=\, e^u} \underbrace{x'}_{g' \,=\, x'} + \underbrace{\underbrace{\frac{b(t)}{a(t)} \cdot e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}}_{u'e^u = (e^u)'}}_{f'} \underbrace{x}_{g} = 0$

$f \cdot g' + f' \cdot g$

$$\frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

ce qui est equivalent à $\left(e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot x\right)' = 0$

$\Rightarrow \quad e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x = C, \quad C \in \mathbb{R}$ (constante)

$$\Rightarrow \quad e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x = C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ (constante)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = C e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}}$$

Remarque : la constante C est déterminée par la condition initiale : $x(t_0) = x_0$.

Exercice Résoudre : ① $2x' + 4x = 0$ avec $x(0) = 1$

② $tx' + x = 0$ avec $x(1) = 1$

- Résolvons (1) $2x' + 4x = 0$ avec $x(0) = 1$

① . Résolvons (1) $2x' + 4x = 0$ avec $x(0) = 1$

étape 1 : on divise (1) par 2 on obtient

$$(1) \Leftrightarrow x' + 2x = 0$$

car $\int 2dt = 2t$

étape 2 : on multiplie par $e^{\int 2dt} = e^{2t}$

on obtient : $(1) \Leftrightarrow e^{2t} \cdot x' + 2e^{2t} x = 0$

$$\Leftrightarrow (e^{2t} \cdot x)' = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2t} x(t) = C$$

$$\Leftrightarrow x(t) = Ce^{-2t}$$

étape 3 : trouvons C : comme $x(0) = 1$, on a $1 = x(0) = C \cdot e^{-2 \cdot 0} = Ce^{0} = C$

donc $\boxed{C = 1}$

Conclusion : la solution de (1) est $\boxed{x(t) = e^{-2t}}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$

② Résoudre (2) $t x' + x = 0$ $\quad x(1) = 1$

étape 1 : comme on doit diviser par t, on considère $t \in]0,+\infty[$ (car la condition initiale est $\underset{t=1>0}{x(1)=1}$)

Soit $t \in]0,+\infty[$, on divise par t

on a alors $(2) \Leftrightarrow x' + \frac{1}{t} x = 0$

étape 2 : on multiplie par $e^{\int \frac{1}{t} dt}$ or $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| \overset{t>0}{=} \ln(t)$

et $e^{\ln t} = t$

donc on multiplie ② par t : (avec $t>0$)

on a $(2) \Leftrightarrow t x' + x = 0$

$\Leftrightarrow (t . x)' = 0$

$\Leftrightarrow t x(t) = C \quad , C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x(t) = \frac{C}{t}$ et comme $x(1) = 1$ on a : $1 = \frac{C}{1} = C$

donc $C = 1$

Conclusion la solution est $\boxed{x(t) = \frac{1}{t}}$, avec $t>0$

6. Resolution de $a(t)x' + bx = d(t)$ (2), $t \in I$

hypothèses : ① on suppose a, b et d continues sur I

② on suppose de plus que $a(t) \neq 0$ sur I

Methode

étape 1 : on divise (2) par $a(t)$: on obtient

$$(2) \Leftrightarrow x' + \boxed{\frac{b(t)}{a(t)}} x = \frac{d(t)}{a(t)}$$

etape 2 : on multiplie (2) par $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$ (les 2 membres !!)

on a alors

$$(2) \Leftrightarrow e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot x' + \frac{b(t)}{a(t)} \cdot e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot x = e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot \frac{d(t)}{a(t)}$$

etape 3

$$(2) \Leftrightarrow \left(e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot x \right)' = e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \frac{d(t)}{a(t)}$$

$$\Rightarrow e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot x(t) = \int e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \frac{d(t)}{a(t)} dt + C$$

$$\Leftrightarrow x(t) = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \left[\int e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot \frac{d(t)}{a(t)} dt + C \right]$$

où C est determiné par la condition initiale.

Exercice : (1) Résoudre $2x' + 4x = 1$ $\quad x(0) = 1$

(2) " $tx' + x = 2$ $\quad x(1) = 1$

Exercice : résoudre $t x' + x = 3$ avec $x(-1) = 1$

Résolution de $tx' + x = 3$ avec $t \in I \subset \mathbb{R}$ avec $-1 \in I$

Pour ça on divise par t sous réserve que $t \neq 0$ càd que $I \subset]-\infty, 0[$

(car $-1 \in I$, et $t \neq 0$)

Soit $t \in I$, $\quad x' + \frac{1}{t} x = \frac{3}{t}$ (1)

On multiplie chaque membre de (1) par $e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln|t|} = |t| \overset{t<0}{=} -t$

On obtient $(-t . x(t))' = -t . \frac{3}{t} = -3$

On intègre de chaque côté :

intégré de chaque

$$-t\,x(t) = -3t + C$$

Donc $x(t) = \frac{-3t}{-t} + \frac{C}{-t} = 3 - \frac{C}{t}$

Comme $x(-1) = 1$ on a $\underset{x(-1)}{1} = 3 - \frac{C}{(-1)} = 3 + C$ donc $C = 1 - 3 = -2$

Conclusion $x(t) = 3 + \frac{2}{t}$ est la solution du problème pour $t \in]-\infty, 0[$

Exercice : Modèle à effet Allee

$$x' = x(1-x)(x-M) \qquad 0 \leq M \leq 1$$

On pose $f(x) = x(1-x)(x-M)$ (polynôme de degré 3) $x' = f(x)$

pose $f(x) = x(1-x)(x-M)$ (polynôme de degré 3) $x' = f(x)$

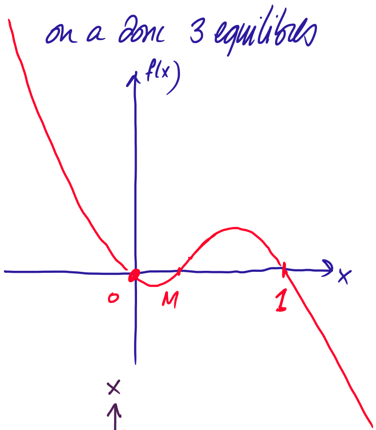
Les équilibres vérifient $x' = 0$ c'est à dire $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x(1-x)(x-M) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $1-x = 0$ ou $x - M = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \\ \text{ou} \\ x = M \end{cases}$

on a donc 3 équilibres

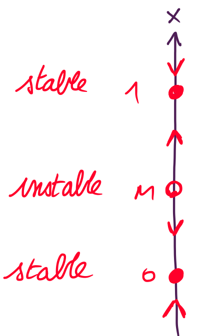


$f(x) = x(1-x)(x-M)$

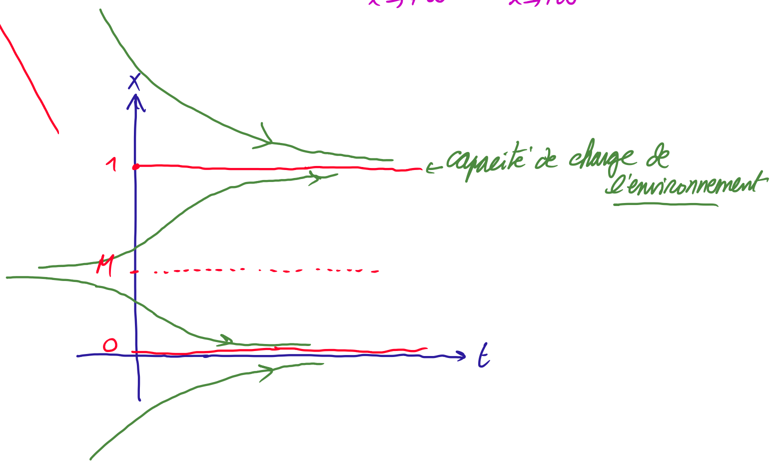
$= \underbrace{-}x^3 + \dots x^2 + \dots + x + \dots$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$



portrait de phase



Exercice : Chercher les équilibres de $x' = (x-1)^2(x-3)(x+5)$

Déterminer leur stabilité

Tracer des trajectoires représentatives

On pose $f(x) = (x-1)^2(x-3)(x+5)$

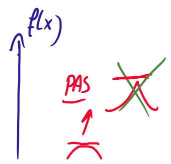
Les équilibres vérifient $x' = 0$ c'est-à-dire $f(x) = 0$

$$\iff (x-1)^2(x-3)(x+5) = 0$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x-3 = 0 \\ x+5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$$

On a 3 équilibres

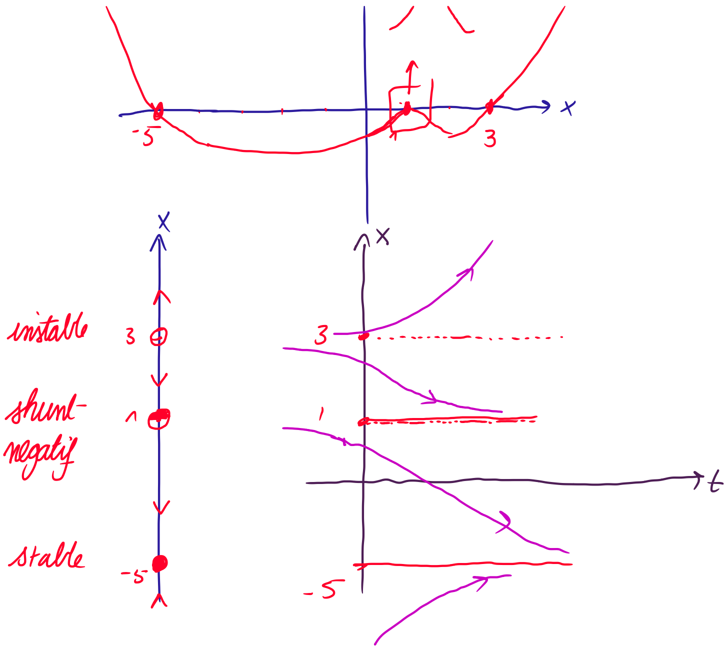


f(x) : polynôme de d°4

$$f(x) = (x-1)^2(x-3)(x+5)$$

$$= (x^2-2x+1)(x-3)(x+5)$$

$$= x^4 + \dots x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$

$$f(x) = (x-1)^2\,(x-3)\,(x+5)$$

puissance paire → on ne traverse pas

puissance impaire : on traverse

Exercice : Mêmes questions pour $x' = (x+1)^3 \cdot x^2 \cdot (x-4)$

Posons $f(x) = (x+1)^3 x^2 (x-4)$

Les équilibres vérifient $x' = 0$ càd $f(x) = 0 \iff (x+1)^3 x^2 (x-4) = 0$

$\iff \begin{cases} (x+1)^3 \\ \text{ou} \\ x^2 = 0 \\ \text{ou } x-4=0 \end{cases}$

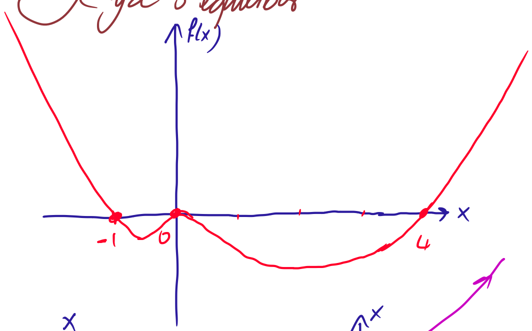
$\iff \begin{cases} x+1=0 \iff \boxed{x=-1} \\ \boxed{x=0} \\ \boxed{x=4} \end{cases}$

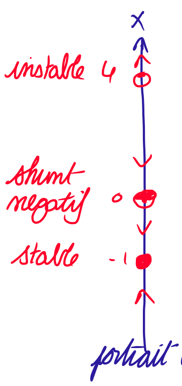
Il y a 3 équilibres

$f(x) = (x+1)^3 x^2 (x-4)$
$= x^6 + \dots x^5 + \dots x^4 \dots$

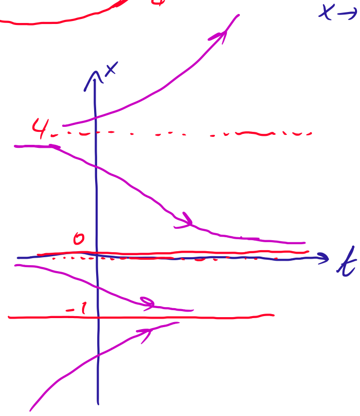
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$





portrait de phase



portrait de phase

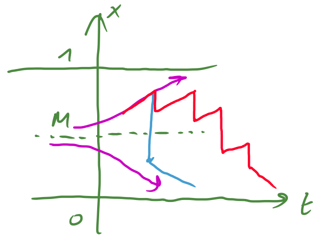
Exercice : Mêmes questions pour

$$x' = x(1-x)(x-M) - Ex$$

$0 \leq M \leq 1$

$E \geq 0$

modèle avec effet Allee et exploitation



On pose $f(x) = x(1-x)(x-M) - Ex$

les équilibres vérifient $x' = 0$ càd $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x(1-x)(x-M) - Ex = 0$

$\Leftrightarrow x\left((1-x)(x-M) - E\right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{toujours un équilibre quelles que soient les valeurs de } M \text{ et } E \\ (1-x)(x-M) - E = 0 \Leftrightarrow x - M - x^2 + xM - E = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2 - x(1+M) + E + M = 0$

De la forme $ax^2 + bx + c = 0$

avec $a = 1$

$b = -(1+M)$

$c = E + M$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-(1+M))^2 - 4.1.(E+M)$

$= (1+M)^2 - 4(E+M)$

$= 1 + 2M + M^2 - 4E - 4M$

$= 1 - 2M + M^2 - 4E$

$= (1-M)^2 - 4E$

Si $\Delta \geq 0$ càd $(1-M)^2 - 4E \geq 0$

$\Leftrightarrow (1-M)^2 \geq 4E$

$\Leftrightarrow \frac{(1-M)^2}{4} \geq E$ alors on a 1 ($\Delta = 0$) ou 2 ($\Delta > 0$) équilibres de plus

si $\Delta < 0$ càd $E > \frac{(1-M)^2}{4}$ alors aucun équilibre de plus que $\underline{\underline{0}}$

autre méthode $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1-x)(x-M) - Ex = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x(1-x)(x-M)}_{g(x)} = \underbrace{E.x}_{h(x)}$

$g(x)$ polynôme de d° 3

$h(x)$ équation d'une droite

y

polynome de d